

Παράδειγμα 3
Άσκηση 4

30/03/2017

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{Βρείτε } \chi_E(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Δείξτε ότι $E^n = E^{n-2} + E - I_3 \quad \forall n \geq 3$
Υπολογίστε E^{100}
Βρείτε $m_E(x)$.

$$\chi_E(x) = \det(E - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)(x^2-1) = -(x-1)^2(x+1) = -x^3 + x^2 + x - 1$$

Ορίζουμε για $n \geq 3$ την πρόταση: $P(n) = E^n = E^{n-2} + E - I_3$
Θα δείξουμε με μαθημ. επαγωγή ότι $n \geq 3$ ότι η $P(n)$ ισχύει.
 $P(3)$: $E^3 = E + E^2 - I_3$ ισχύει από θ. Cayley-Hamilton
 $\chi_E(E) = 0_{3 \times 3}$

Έστω $n \geq 3$ και ότι η $P(n)$ ισχύει. Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ ισχύει ύποσθ ότι $E^{n+1} = E^{(n+1)-2} + E - I_3$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } E^{n+1} &= E^n \cdot E \stackrel{\text{Υπόθ. επαγ.}}{=} (E^{n-2} + E - I_3) \cdot E \\ &= E^{n-1} + E^3 - E \\ &\stackrel{\text{από } P(3)}{=} E^{n-1} + (E + E^2 - I_3) - E \\ &= E^{n-1} + E^2 - I_3 \end{aligned}$$

Άρα, η $P(n+1)$ ισχύει

$$\begin{aligned} 50 \quad E^{100} &= E^{98} + E^2 - I_3 \\ 1 \quad E^{98} &= E^{96} + E^2 - I_3 \\ 1 \quad E^{96} &= E^{94} + E^2 - I_3 \\ &\vdots \\ 4 \quad E^8 &= E^6 + E^2 - I_3 \\ 3 \quad E^6 &= E^4 + E^2 - I_3 \\ 2 \quad E^4 &= E^2 + E^2 - I_3 \end{aligned}$$

49 το ίδιο
Προσθέτουμε κατά μέλη
 $E^{100} = 49(E^2 - I_3) + E^2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από $\chi_E(x) = -(x-1)^2(x+1)$ και το $m_E(x)$ διαιρεί το $\chi_E(x)$
 και έχουν τους ίδιους ανώτατους παράγοντες
 έπεται ότι $m_E(x) = (x-1)(x+1)$ ή $m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$

Από $(E-I_3)(E+I_3) = E^2 - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_{3 \times 3}$

$\Rightarrow m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$

Φορμάριο 4

Λέμμα 1: Έστω $n \geq 2$ και $f(x) = (x-1)^n \cdot (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)$
 $\in \mathbb{F}(x)$. Θεωρείς

$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ & \vdots \\ & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, όπου $n=2$ $\begin{vmatrix} -x & -a_0 \\ 1 & -a_1-x \end{vmatrix} =$
 $= x^2 + a_1x + a_0$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & 1 & \dots & \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times (n+1)}$. Δείξε ότι $\chi_A(x) = f(x)$

Απόδειξη

Ότι $\chi_A(x) = f(x)$

Με επαγωγή στο $n \geq 2$. Για $n=2$ το κάνουμε.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=2$. Θα το δείξουμε για $n=3$.
 (Το βήμα από n σε $n+1$ είναι παρόμοιο)

$n=3$

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2-x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} -x & -a_1 \\ 1 & -a_2-x \end{vmatrix} + (-a_0) \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-x) \left(\begin{vmatrix} -x & -a_1 \\ 1 & -a_2-x \end{vmatrix} \right) - a_0 =$ αυτό που δείχνουμε
 $\begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{vmatrix}$

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Βρείτε αλγόριθμο που να αποφασίζει αν A, B όμοιοι ή όχι.

Αν A, B όμοιοι $\Rightarrow A, B$ έχουν ίδια βαθμίδα, επίλυση, ίσος χαρακτηριστικός πολυώνυμο, ελάχιστο πολυώνυμο.

Υπάρχει θεωρία (πρώτη κανονική μορφή, Jordan μορφή) που δίνει το πρόβλημα

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ όμοιοι και $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_r x^r \in \mathbb{F}[x]$.
Τότε $g(A) = 0_{n \times n}$ αν και μόνο αν $g(B) = 0_{n \times n}$.

Απόδειξη

Αφού A, B όμοιοι υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστ. με $B = P^{-1}AP$.

Τότε $g(B) = b_0 I_n + b_1 B + \dots + b_r B^r$

$$\begin{aligned} & b_0 (P^{-1} I_n P) + b_1 (P^{-1} A P) + \dots + b_r (P^{-1} A P)^r = \\ & = b_0 (P^{-1} I_n P) + b_1 (P^{-1} A P) + \dots + b_r P^{-1} A^r P = \\ & = P^{-1} (b_0 I_n + b_1 A + \dots + b_r A^r) P = P^{-1} g(A) P \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα έπεται, γιατί P αντιστρέφεται

Πρόταση

Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ όμοιοι, τότε $m_A(x) = m_B(x)$

Απόδειξη $\rightarrow$ Άμεση.

Ορισμός

Έστω F σώμα, $V \neq \{0\}$ διανυσμ. χώρος πεπερασμένης διαστάσης $/F$ και $T: V \rightarrow V$ γραμμικός ενδομορφισμός. Ορίζουμε το ελάχιστο πολυώνυμο $m_T(x) \in F[x]$ ως εξής:

Έστω $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση του V . Θετουμε $m_T(x) = m_{[T]_e}(x)$

Πρόταση: Ίδια βάση πάνω και κάτω. Από το πρόβλημα $m_T(x)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης e του V .

Εσωτερικό Γινόμενο

Θεώρημα

Έστω A τετραγωνικός πίνακας επί του $\mathbb{R}^{n \times n}$. Υποθέτουμε A συμμετρικός. Τότε A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

Ορισμός

Έστω V $\mathbb{R}$ - V και $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ μια απεικόνιση

α) Η ϕ λέγεται συμμετρική αν $\phi(u, w) = \phi(w, u)$ για κάθε $u, w \in V$

Παράδειγμα

Η $\phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 5x_2 y_1 + 5x_2 y_2$ (*)
Είναι συμμετρική αν και μόνο αν $a = \frac{1}{5}$

Απόδειξη

Έχουμε $\phi((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = y_1 x_1 + y_1 x_2 + 5y_2 x_1 + 5y_2 x_2$ (**)

Αν $a \neq \frac{1}{5}$ $\phi((1, 0), (0, 1)) = 0 + 1 + 5 \cdot 0 + 0 = 1$

$\phi((0, 1), (1, 0)) = 5$

Άρα, αφού $a \neq \frac{1}{5}$ ϕ όχι συμμετρική

Έστω $a = \frac{1}{5}$. Συμπληρώνοντας (*) με (**)

$\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \phi((b_1, b_2), (a_1, a_2))$ για κάθε $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

και $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

Συνεπώς ϕ = συμμετρική

β) Η ϕ λέγεται διγραμμική αν

$$\phi(v, w+z) = \phi(v, w) + \phi(v, z)$$

$$\phi(v, \lambda w) = \lambda \phi(v, w)$$

$$\phi(v+w, z) = \phi(v, z) + \phi(w, z)$$

Με άλλα λόγια, διγραμμική σημαίνει ότι αν σταθεροποιήσουμε μια από τις δύο πρώτες μεταβλητές παίρνουμε γραμμική εξάρτηση του ~~πρώτου~~ δεύτερου μεταβλητών και αν

συνθέτουμε μια μετασχηματισμό στην δεύτερη μετασχηματισμό παίρνουμε γραμμική συνάρτηση την πρώτη μετασχηματισμό.

Παράδειγμα

$$\text{Η } \phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + 5a_2 b_1 + 5a_2 b_2$$

Είναι διγραμμική για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

$$\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2) + (b'_1, b'_2)) = a_1(b_1 + b'_1) + a_1(b_2 + b'_2) + 5a_2(b_1 + b'_1) + 5a_2(b_2 + b'_2) =$$

$$= a_1 b_1 + a_1 b'_1 + a_1 b_2 + a_1 b'_2 + 5a_2 b_1 + 5a_2 b'_1 + 5a_2 b_2 + 5a_2 b'_2$$

$$= (a_1 b_1 + a_1 b_2 + 5a_2 b_1 + 5a_2 b_2) + (a_1 b'_1 + a_1 b'_2 + 5a_2 b'_1 + 5a_2 b'_2)$$

$$= \phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + \phi((a_1, a_2), (b'_1, b'_2))$$

$$\text{Επίσης } \phi((a_1, a_2), \mu(b_1, b_2)) = \phi((a_1, a_2), (\mu b_1, \mu b_2)) =$$

$$= a_1(\mu b_1) + a_1(\mu b_2) + 5a_2(\mu b_1) + 5a_2(\mu b_2) =$$

$$= \mu(a_1 b_1 + a_1 b_2 + 5a_2 b_1 + 5a_2 b_2) =$$

$$= \mu \phi((a_1, a_2), (b_1, b_2))$$

$$\text{Επίσης } \phi((a_1, a_2) + (a'_1, a'_2), (b_1, b_2)) = \text{όπως προηγουμένως} =$$

$$= \phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + \phi((a'_1, a'_2), (b_1, b_2))$$

$$\text{και } \phi(\mu(a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \phi((\mu a_1, \mu a_2), (b_1, b_2)) = \text{όπως προηγουμένως} =$$

$$= \mu \phi((a_1, a_2), (b_1, b_2))$$

Παράδειγμα

$$\text{Η } \psi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = 2(a_1 + a_2)$$

Δείχνει είναι διγραμμική

Γιατί

$$\psi((1, 0), (1, 0)) = 2$$

$$\psi((1, 0), 2(1, 0)) = 2 \neq 2\psi((1, 0), (1, 0))$$

Παρατήρηση: Αν $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ διγραμμική
 $\phi(v, 0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $v \in V$
 και $\phi(0_V, w) = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $w \in V$
 Απόδειξη

$$\phi(v, 0_V) = \phi(v, 0_{\mathbb{R}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{R}} \phi(v, 0_V) = 0_{\mathbb{R}}$$

Όμοια και η δεύτερη

Παρατήρηση: Έστω $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $\phi((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) =$ κάποια έκφραση

Αν η έκφραση είναι άθροισμα όρων $\lambda_{ij} a_i b_j$ με $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$
 τότε και μόνο τότε ϕ διγραμμική.

Πρόταση

Έστω $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Τ.Α.Ε.Ι

i) ϕ γραμμική

ii) Υπάρχει πίνακας $A = [\lambda_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\text{ώστε } \phi((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} a_i b_j \quad (*)$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq j \leq n \text{ για κάθε } (a_1, \dots, a_n)$$

$$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$$

Παρατήρηση

1. ϕ συμμετρική $\Leftrightarrow A$ συμμετρικός πίνακας

2. Η (*) γράφεται $T_{\mathbb{R}}((a_1, \dots, a_n)) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

Ορισμός

Έστω V δ.κ. επί του $\mathbb{R}$ και $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Η ϕ λέγεται βελτική ορισμένη αν $\phi(v, v) \geq 0$ για κάθε
 $v \in V - \{0_V\}$

Ορισμός

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{R}$. Η απεικόνιση $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ** στο V αν είναι διγραμμική, συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Παράδειγμα

Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Είναι εσωτερικό γινόμενο στον δ.χ. $\mathbb{R}^n$

Συμμετρικό : Αμεσο

Διγραμμικό : Απόδειξη όπως προηγουμένως

Θετικά ορισμένο : Έστω $w = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικό

$$\phi(w, w) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \text{ γιατί υπάρχει } a_i \text{ με } a_i \neq 0 \text{ (αλλιώς } w = 0_{\mathbb{R}^n})$$

Παράδειγμα

Έστω $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 - 5a_2 b_2$

→ Είναι η ϕ συμμετρική;

Ναι, εύκολη επαλήθευση

→ Είναι η ϕ διγραμμική;

Ναι, επαλήθευση όπως προηγουμένως

→ Είναι η ϕ θετικά ορισμένη

Οχι, γιατί $(0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ αλλά $\phi((0, 1), (0, 1)) = -5 < 0$

Παράδειγμα

Το $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$

Απόδειξη

Συμμετρικό, απόδειξη όπως προηγουμένως

Διγραμμικό

— " —

— " —

— " —

Θετικό

Ορισμένο

Έστω $v = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ μη μηδενικό

$$\text{τότε } \phi(v, v) = a_1^2 + a_2^2 \geq 0$$

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζουμε $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^t A)$

Δεχόμενος $\langle, \rangle$ εσωτερικός γινόμενο στα V

Απόδειξη

$\langle, \rangle$ συμμετρικός $\langle B, A \rangle = \text{Tr}(A^t B)$

Φανερά $\text{Tr}(c^t) = \text{Tr}(c)$ άρα $= \text{Tr}((A^t B)^t) = \text{Tr}(B^t A) = \langle A, B \rangle$

$\langle, \rangle$ διγραμμικός (Γενικά $\text{Tr}(c_1 + c_2) = \text{Tr}(c_1) + \text{Tr}(c_2)$)

Έχουμε λοιπόν $\langle, \rangle$ συμμετρικό άρα να δείξουμε
 $\langle A, B+B' \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, B' \rangle \quad \forall A, B, B' \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Είναι $\langle A, \lambda B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$ για κάθε $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

Έχουμε $\langle A, B+B' \rangle = \text{Tr}((B+B')^t A) = \text{Tr}(B^t A + (B')^t A)$

$$= \text{Tr}(B^t A) + \text{Tr}((B')^t A) = \langle A, B \rangle + \langle A, B' \rangle$$

$$\langle A, \lambda B \rangle = \text{Tr}(\lambda B)^t A = \text{Tr}(\lambda B^t A) = \lambda \text{Tr}(B^t A) = \lambda \langle A, B \rangle$$

Δεχόμενος: $\langle, \rangle$ θετικό ορισμένο

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη μηδενικός. Θα δούμε

$\langle A, A \rangle > 0$, δηλαδή ότι $\text{Tr}(A^t A) > 0$

Θέτουμε $B = A^t A$. Έστω b_{ij}

$$\text{Για το } b_{11} \text{ έχουμε } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ & * & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ * \\ a_{n1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } b_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2$$

Πιο γενικά

$$b_{ij} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2$$

$$\text{Συνεπώς, } \langle A, A \rangle = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}^2 \text{ το } \text{γιατί } A \neq 0_{n \times n}$$

Ορισμός

Αν $\forall$ δ.κ. επί του $\mathbb{R}$ και $\langle, \rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο V το ζεύγος $(V, \langle, \rangle)$ λέγεται χώρος εσωτερικού γινόμενου ή ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ

Παράδειγμα

$$\text{Έστω } V = \mathbb{P}_n[\mathbb{R}] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Ορίζουμε } \langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{με } \langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Τότε $\langle, \rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο V .

$\langle, \rangle$ συμμετρικό: προφανές

$\langle, \rangle$ διφοβητικό: —

$\langle, \rangle$ θετικά ορισμένο: Έστω $f(x) \in \mathbb{P}_n[\mathbb{R}]$ μη μηδενικό

Πρέπει να δείξουμε $\int_0^1 (f(x))^2 dx > 0$.

Απόδειξη

Φαίνεται $\int_0^1 (f(x))^2 > 0$ εάν ολοκληρώμα μη αρνητικής συνάρτησης

Έστω d ο βαθμός του $f(x)$. Το $f(x)$ έχει το πολύ d ρίζες στο $\mathbb{R}$. Αφού $[0,1]$ άπειρα σύνολο, υπάρχει $a \in [0,1]$ με $f(a) \neq 0$. Αφού $f(x)$ συνεχής, $f(a) \neq 0$

για μια περιοχή $z \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subseteq [0,1]$

$$\text{Αρα, } \int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^{a-\varepsilon} f(x)^2 dx + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)^2 dx + \int_{a+\varepsilon}^1 f(x)^2 dx \geq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)^2 dx$$

$$> 2\varepsilon \inf \{f(x)^2 \mid x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\} > 0$$